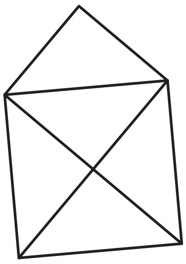
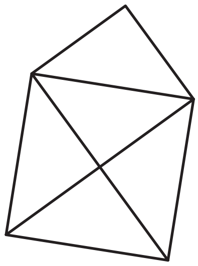


Das ist das Haus vom Ni-ko-laus

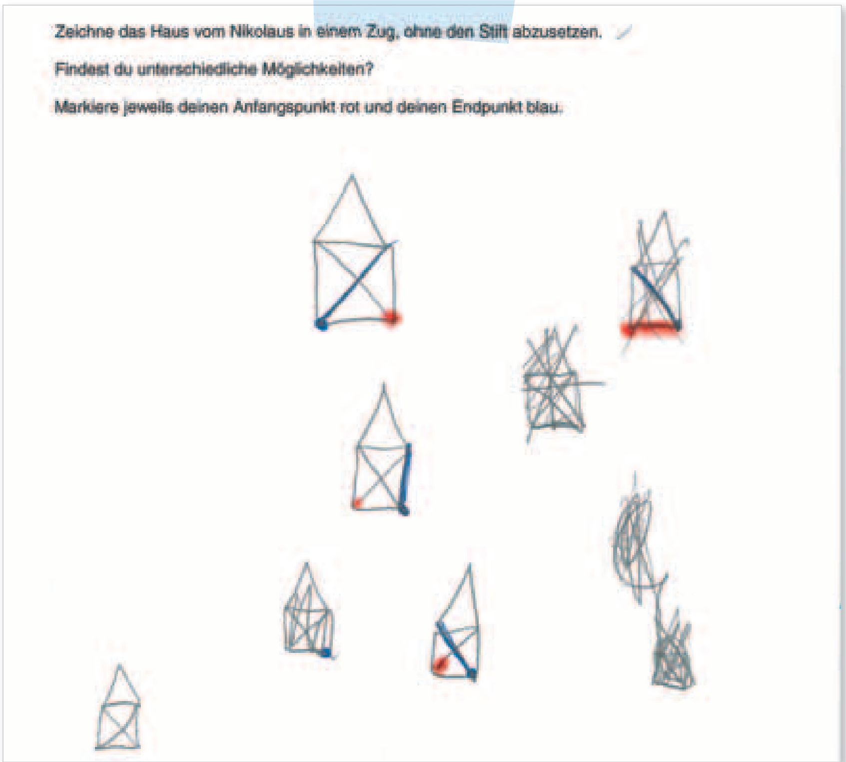


Figuren in einem Zug zeichnen

‣ Euler, Brückenproblem, Streckenzüge

Spielend leicht ist der Einstieg in Wegeprobleme über den Streckenzug „Das ist das Haus vom Nikolaus". Eine Faszination, die nicht nur Kinder ergreift, geht von Problemen aus, die zunächst mit Trial-and-Error-Versuchen begonnen werden können, um über das systematische Probieren zu grundlegenden Prinzipien zu gelangen. Lösungen und damit Erfolgserlebnisse sind möglich, ohne schon durchdrungen zu haben, wie das Problem verallgemeinernd zu begründen ist.

FOTO: ANNE SCHNEIDER



1 Merle probiert, das „Haus vom Nikolaus" in einem Zug zu zeichnen, und findet auf diese Art vier Möglichkeiten.

VON ANNE SCHNEIDER

Die in diesem Beitrag vorgestellten Aufgaben wurden sowohl im Knobeltreff der Pädagogischen Hochschule Heidelberg mit mathematisch potenziell begabten Dritt- und Viertklässlern als auch in einem vierten Schuljahr erprobt. Im Sinne der natürlichen Differenzierung bieten die Aufgaben Lerngelegenheiten für heterogene Gruppen. Die Einstiegshürde ist sehr gering. Anschlussaufgaben bieten aber die Möglichkeit, tiefer in das Thema einzusteigen, zu verallgemeinern, zu begründen und anzuwenden.

Mathematik ist mehr als Rechnen

Mit großer Begeisterung versuchen Ben und Esram das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen, ohne dabei einen Weg doppelt zu spuren. Eigentlich macht ihnen der Mathematikunterricht im vierten Schuljahr oft keine große Freude. Im Rechnen sind sie langsam, es unterlaufen ihnen immer wieder Fehler. Doch heute beschäftigt sich die Klasse mit Wegeproblemen. „Ich finde es toll, dass ich einfach mal ausprobieren kann", freut sich Merle, die schon vier verschiedene Möglichkeiten gefunden hat, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen (siehe Abb. 1).

Leonhard Euler und das Königsberger Brückenproblem

„Das ist das Haus vom Nikolaus" ist der achtsilbige Begleitsatz des Zeichenspiels, bei dem versucht werden muss, das aus acht Strecken bestehende Haus in einem Zug – ohne abzusetzen – zu zeichnen. Das zur Graphentheorie gehörende Problem löste Euler nach seinen Überlegungen, ob es einen Rundgang durch Königsberg (heute Kaliningrad) gebe, bei dem alle sieben Brücken,

Fördern und Fordern

Das Aufgabenfeld bietet Chancen der natürlichen Differenzierung und lädt daher sowohl rechenschwächere als auch mathematisch begabte Kinder zum mathematischen Denken ein.

die über den Fluss Pregel führen, jeweils genau einmal überquert würden.

Er verallgemeinerte das Problem des Stadtrundgangs auf beliebige Figuren und wies 1735 nach, dass eine Figur nur dann in einem Zug, ohne abzusetzen, gezeichnet werden kann, wenn die zusammenkommenden Wege an den Kreuzungen folgende Bedingungen erfüllen: Entweder, die Anzahl der Wege, die an den Kreuzungen zusammenkommen, ist geradzahlig oder es sind genau zwei Kreuzungen vorhanden, in der sich eine ungerade Anzahl an Wegen treffen.

Abbildung 2 zeigt eine Figur, die nur geradzahlige Kreuzungen aufweist. Bei einer solchen Figur kann der Streckenzug an jeder Kreuzung begonnen werden. Die Startkreuzung ist dann zugleich auch die Endkreuzung. Ein solch zusammenhängender Graph wird Eulerkreis genannt.

Schwieriger zu erkennen sind Figuren, die genau zwei Kreuzungen aufweisen, in denen eine ungerade Anzahl von Wegen zusammenkommen. Eine solche Figur wie in Abbildung 3 wird Eulerweg genannt. Das Durchlaufen eines Eulerwegs gelingt nur dann, wenn an einer ungeraden Kreuzung begonnen wird. Die zweite ungerade Kreuzung ist der Endpunkt – wie beim Haus vom Nikolaus.

Die in der Graphentheorie benutzen Begriffe werden für die Unterrichtseinheit vereinfacht (siehe Abb. 4).

„Das Haus vom Nikolaus“ als Einstieg in das systematische Probieren

Das den meisten Kindern bekannte „Haus vom Nikolaus“ dient als Einstieg in das systematische Probieren. Schnelle Erfolgserlebnisse motivieren, weitere der insgesamt 88 Möglichkeiten zu finden

Auf einen Blick

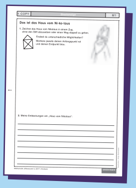
Klassenstufe: 3–4

Zeit: 3–5 Stunden

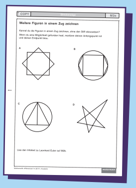
Lerngelegenheiten:
- Nutzen heuristischer Strategien, wie das systematische Probieren
- Nutzen von Symmetrieeigenschaften
- Erkennen von Strukturgleichheiten
- Verallgemeinern und Begründen

Materialien

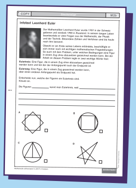
M1: Das ist das Haus vom Ni-ko-laus
M2: Weitere Figuren in einem Weg zeichnen
M3: Figuren verändern
M4: Eulerkreis oder Eulerweg?
M5: Die Regel entdecken und erklären
M6: Eulerhausen



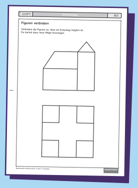
M1
Seite 36



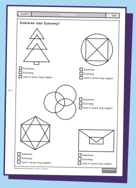
M2a
Seite 37



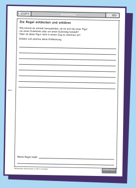
M2b



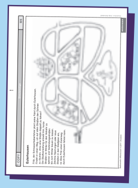
M3



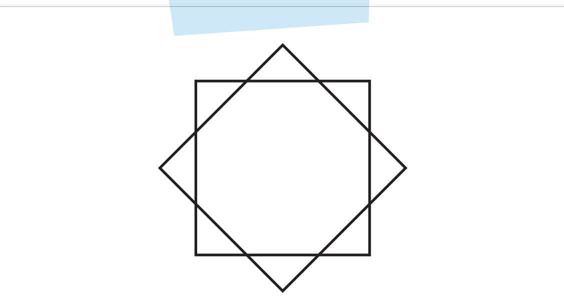
M4



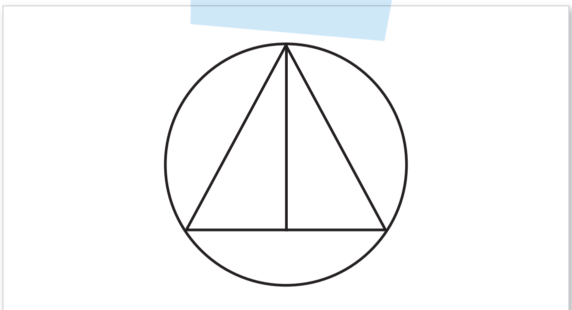
M5



M6
Seite 38



2 Ein Eulerkreis: In dieser Figur gibt es nur geradzahlige Kreuzungen.



3 Ein Eulerweg: Es gibt genau zwei ungerade Kreuzungen.

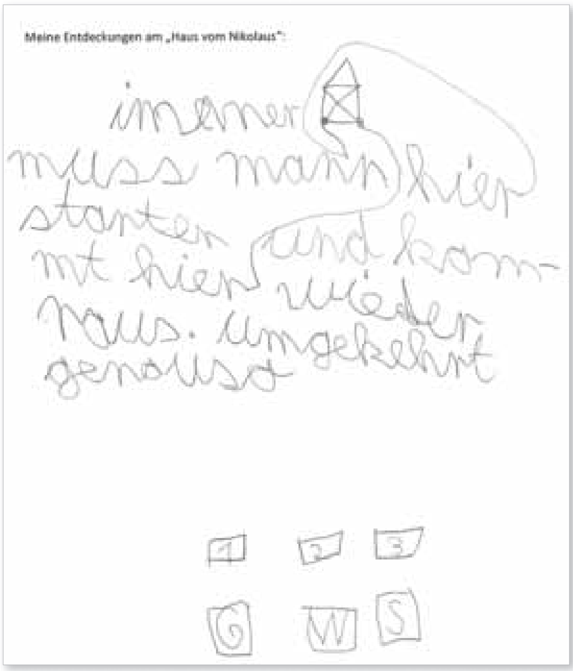
Fachbegriffe	Vereinfachte Begriffe
Knoten	Kreuzung
Kante	Weg
Ordnung der Knoten	Anzahl der Wege, die in einer Kreuzung zusammenkommen

4 Statt der Fachbegriffe aus der Graphentheorie werden vereinfachte Begriffe benutzt.

STOLPERSTEIN

Beim eigenen Entwerfen von Wegenetzen möchten sich die Kinder gerne komplexe, fantasievolle Darstellungen ausdenken. Diese bezüglich eines Weges zu analysieren fällt allerdings sehr schwer, sodass eine Einteilung in Eulerweg, Eulerkreis und nicht eulersch nur schlecht gelingt. Motivieren Sie die Kinder, einfache, klare Strukturen zu zeichnen.

(vgl. Käpnick 2001, S. 76), das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen. **M1** erfordert, die eigene Vorgehensweise zu systematisieren, indem der Anfangspunkt rot und der Endpunkt blau zu färben ist. Die ersten Einsichten, dass das Haus vom Nikolaus nur rechts oder links unten begonnen werden kann, werden sichtbar. Der Lehrkraft gelingt es durch diese farbliche Markierung, falsch gelöste Streckenzüge schnell zu identifizieren und sich vom Kind den Weg noch einmal zeigen zu lassen. So können Unklarheiten beseitigt werden und die Weiterarbeit wird möglich. Die gewonnenen Entdeckungen werden auf dem Arbeitsblatt festgehalten (siehe Abb. 5) und im Plenum vorgestellt (siehe Abb. 6).



5 Ein Kind hat die richtige Regel erkannt.

Probieren – Systematisieren – Regeln finden

Das Versprachlichen mathematischer Entdeckungen festigt den erweiterten Wortspeicher und sortiert, sowohl beim Redner als auch bei den Zuhörenden, die neu gewonnenen Erkenntnisse.

Zur Weiterarbeit lädt das zweite Arbeitsblatt ein, welches weitere Figuren zum Nachspuren vorsieht (siehe **M2a**). Um den spielerischen Umgang zu einem kognitiven werden zu lassen, müssen die Kinder auf Grundlage eines absichtlich kurz gehaltenen Infotextes zu Leonhard Euler (**M2b**) untersuchen, bei welcher der Figuren es sich um einen Eulerkreis handelt, und ihre Entscheidung mit eigenen Worten begründen.

Die Inhalte des Infotextes können in Arbeitsblatt **M3** erneut umgesetzt werden. Die gegebenen Figuren sollen so verändert werden, dass ein Eulerweg entsteht. Die kreativ veränderten Figuren benötigen also genau zwei ungerade Kreuzungen. „Ich brauche noch ein Arbeitsblatt, es gibt noch ganz viele andere Lösungen!“, ruft Lisa begeistert durch den Klassenraum. Mit großem Einfallsreichtum findet sie für jede Figur vier Lösungsmöglichkeiten und fordert ein Arbeitsblatt nach dem anderen an.

Um exemplarische Ergebnisse im Plenum zu präsentieren, kann das auf Folie kopierte Arbeitsblatt mithilfe des OHP gezeigt und die hinzugefügten Wege mit Folienstift gezogen werden. Das Lösungsblatt zeigt einige der vielen, kreativen Lösungsmöglichkeiten.

M4 kann wahlweise als Zusatzaufgabe oder als Hausaufgabe eingesetzt werden. Hier gilt es, die gegebenen Figuren daraufhin zu untersuchen, ob sie ein Eulerkreis oder ein Eulerweg sind oder ob sie nicht in einem Zug zeichenbar sind.

Regeln umsetzen – Eigenproduktionen

Nach dieser intensiven Auseinandersetzung mit schon gegebenen Figuren dürfen die Kinder nun selbst kreativ werden. In Partnerarbeit gestalten sie eine Figur, die man in einem Zug zeichnen kann, und eine Figur, bei der dies nicht möglich ist. Die Kinder sollten die Möglichkeit haben, zunächst einige Skizzen anzufertigen. Wenn sie sich für zwei ihrer Figuren entschieden haben, holen sie sich bei der Lehrkraft zwei DIN-A5-Blätter, auf die sie ihre Figuren mit einem dicken schwarzen Filzstift zeichnen. Bei dieser Aufgabe werden die Anfangs- und Endpunkte nicht gefärbt.

Die entstandenen Figuren werden an der Tafel einer der drei Kategorien zugeordnet: Eulerkreis, Eulerweg, nicht möglich (siehe Abb. 7).

Das Tafelergebnis kann zunächst als Stiller Impuls im Kinositz genutzt werden. Einige Kinder finden falsch zugeordnete Figuren, ordnen sie neu zu und begründen, warum die ausgewählte Figur in eine andere Kategorie passt. Wenn das Zuordnen schwerfällt, können die Anfangs- und Endpunkte der Wege wieder rot und blau gefärbt werden, sodass die Einteilung offensichtlicher wird. Die ersten Begründungen zu allgemeinen Aussagen werden in dieser Phase getroffen: „Das muss ein Eulerkreis sein, ich komme da wieder raus, wo ich angefangen habe", argumentiert Liam. Wohingegen Hanna auffällt: „Die Figur kann nicht gehen, hier ist noch eine Kreuzung mit drei Wegen, da komm' ich nicht mehr weiter."

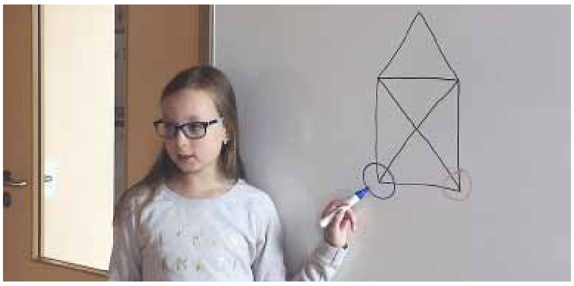
Entdeckungen dokumentieren – die Herausforderung des Verallgemeinerns

Eine große Herausforderung liegt in dieser Unterrichtseinheit in dem Verstehen und Erklären der Regel, die hinter dem Wegeproblem steckt. Mit dem Arbeitsblatt **M5** werden die Kinder dazu aufgefordert, ihre Erkenntnisse zu begründen und Verallgemeinerungen zu formulieren – Kernstücke mathematischen Handelns.

Auf den neu erarbeiteten Wortspeicher sollte vor dieser Dokumentationsphase noch einmal hingewiesen werden. Auch wenn eine solche Dokumentationsaufgabe die Kinder selten begeistert, bietet sie wichtige Lerngelegenheiten, sich mit der Sprache der Mathematik auszudrücken. Wenn die Schülerinnen und Schüler eine solche Verschriftlichung nicht gewohnt sind, werden sie nur ein Bruchstück dessen aufschreiben, was sie tatsächlich herausgefunden haben. Jede aufgeschriebene Erkenntnis sollte daher von der Lehrkraft wohlwollend gewürdigt werden.

Das Schneeschieberproblem

Als anwendungsbezogene Abschlussaufgabe lösen die Kinder ein Alltagsproblem mit den Mitteln der Mathematik (siehe **M6**). Fritz, der Schneeschieberfahrer, plant seine Fahrt durch Eulerhausen. Findet er einen Weg, um auf allen Straßen den Schnee zu räumen, ohne eine Straße doppelt zu fahren? Die Stadtverwaltung erlaubt ihm, kurze Straßen im Winter für den Verkehr zu sperren und Verbindungsstraßen bis zum ersten Schnee bauen zu lassen.



6 Die Erkenntnisse aus der Bearbeitung von M1 werden im Plenum vorgestellt.

Gelingt es den Schülerinnen und Schülern die Erkenntnisse aus den vorhergehenden Stunden in dieser problemhaltigen Aufgabe zu nutzen? Können sie Eulerhausen so verändern, dass ein Eulerweg entsteht?

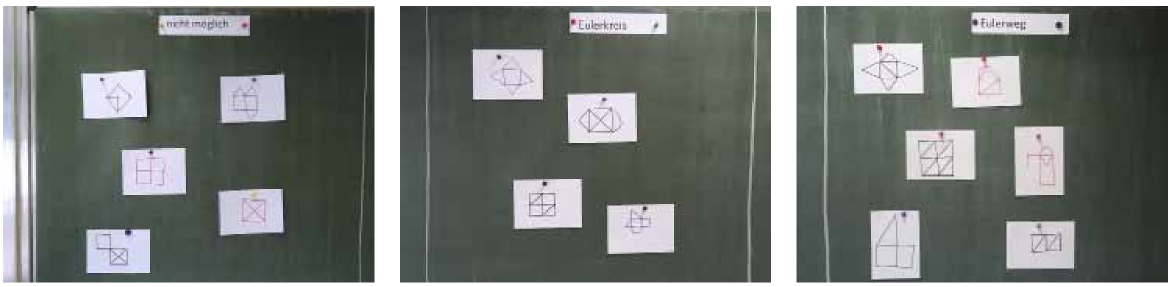
Zur Präsentation der erarbeiteten Ideen bietet es sich an, den Stadtplan auf Folie zu kopieren und die Veränderungen mit Folienstift einzeichnen und am OHP präsentieren zu lassen. Natürlich ist es auch möglich, den Stadtplan auf DIN-A3 zu kopieren und ihn in Gruppenarbeit bearbeiten zu lassen. Neue Straßen könnten aus Papier ausgeschnitten und aufgeklebt werden.

Begeistert stellen die Gruppen ihre Umgestaltung von Eulerhausen vor und zeigen mithilfe eines kleinen Spielzeugautos einen möglichen Weg durch Eulerhausen. „Lass mich auch mal probieren", fordert Ben ein, der mit Esram konzentriert bei der Sache geblieben ist.

Die abschließende Frage *Was hat das jetzt eigentlich mit Mathe zu tun?* beantwortet ein Kind so: „Ich musste so stark nachdenken und immer wieder neu ausprobieren, das war für meinen Kopf voll anstrengend. Aber als ich es dann raus hatte, wie die Regel ist, fiel es mir ganz leicht, das war toll!"

Fazit

Die in der Länge variable Unterrichtseinheit lässt sich thematisch jederzeit einfügen, fördert das mathematische Denken und fordert zum Begründen und Verallgemeinern auf. Kinder, die beim Rechnen Schwierigkeiten haben, können bei diesem mathematischen Problem durchaus Erfolge verzeichnen. Aber auch für mathematisch begabte Kinder ist diese Aufgabe eine Herausforderung und eröffnet Einsichten in evtl. noch unbekannte mathematische Teilgebiete. ■



7 Die ausgewählten Eigenproduktionen werden kategorisiert.

Die Autorin

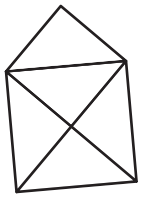
Anne Schneider ist Dozentin für Mathematikdidaktik an der Pädagogischen Hochschule in Heidelberg.

Literatur

Käpnick, Friedhelm: Mathe für kleine Asse 3–4, Band 1. Berlin 2001

Das ist das Haus vom Ni-ko-laus

1. Zeichne das Haus vom Nikolaus in einem Zug,
ohne den Stift abzusetzen oder einen Weg doppelt zu gehen.



Findest du unterschiedliche Möglichkeiten?

Markiere jeweils deinen Anfangspunkt rot und deinen Endpunkt blau.

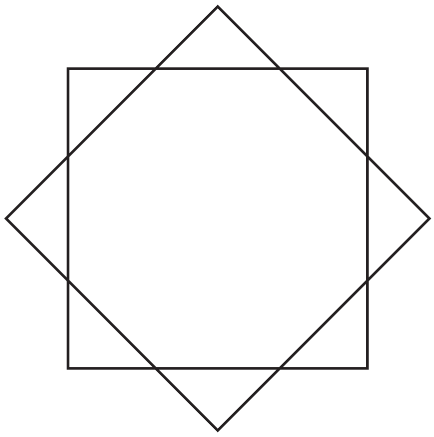
2. Meine Entdeckungen am „Haus vom Nikolaus“:

Weitere Figuren in einem Zug zeichnen

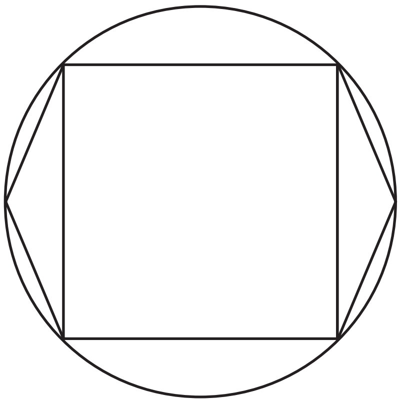
Kannst du die Figuren in einem Zug zeichnen, ohne den Stift abzusetzen?

Wenn du eine Möglichkeit gefunden hast, markiere deinen Anfangspunkt rot und deinen Endpunkt blau.

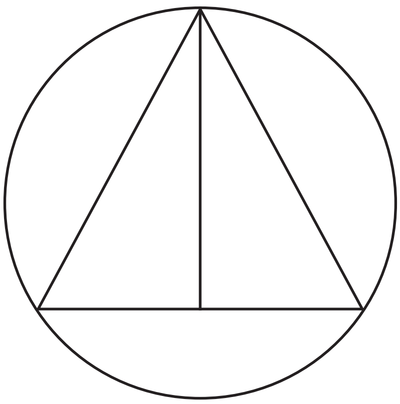
A



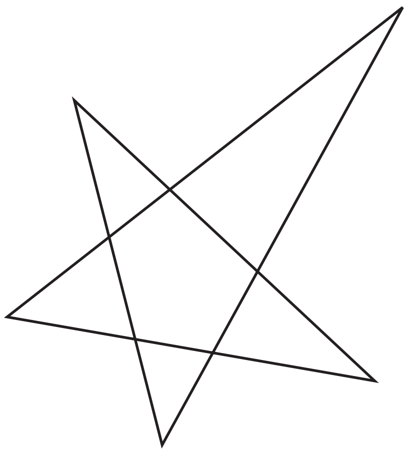
B



C



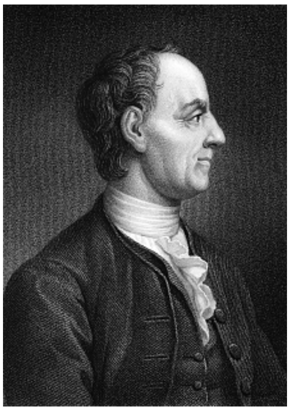
D



Lies den Infotext zu Leonhard Euler auf M2b.

westermann

Infotext Leonhard Euler



Der Mathematiker Leonhard Euler wurde 1707 in der Schweiz geboren und verstarb 1783 in Russland. In seinem langen Leben beantwortete er viele Fragen aus der Mathematik, der Physik und der Technik. Besondere Zahlen und Verfahren sind bis heute nach ihm benannt.

Obwohl er am Ende seines Lebens erblindete, beschäftigte er sich immer noch mit wichtigen mathematischen Fragestellungen. So auch mit dem Problem, unter welchen Bedingungen eine Figur in einem Zug ohne abzusetzen gezeichnet werden kann. Bei der Arbeit an diesem Problem legte er zwei wichtige Wörter fest:

Eulerkreis: Eine Figur, die in einem Zug ohne abzusetzen gezeichnet werden kann und bei der der Anfangspunkt auch der Endpunkt ist.

Eulerweg: Eine Figur, die in einem Zug gezeichnet werden kann, aber einen anderen Anfangspunkt als Endpunkt hat.

Entscheide nun, welche der Figuren ein Eulerkreis sind.
Kreuze an.

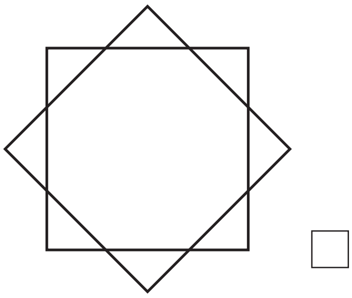
Die Figuren ______________ nennt man Eulerkreis, weil ______________________________

____

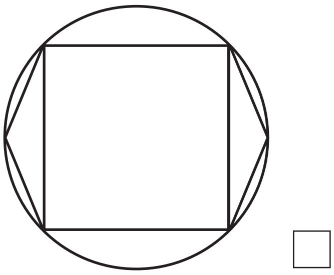
____

____

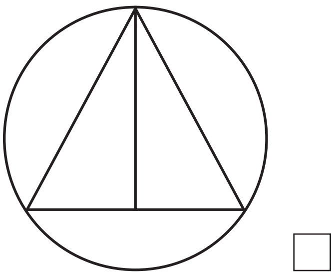
A



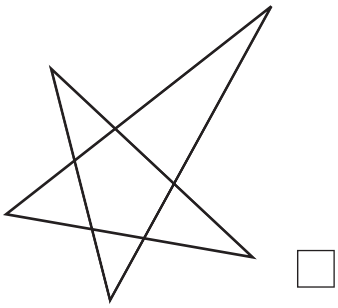
B



C

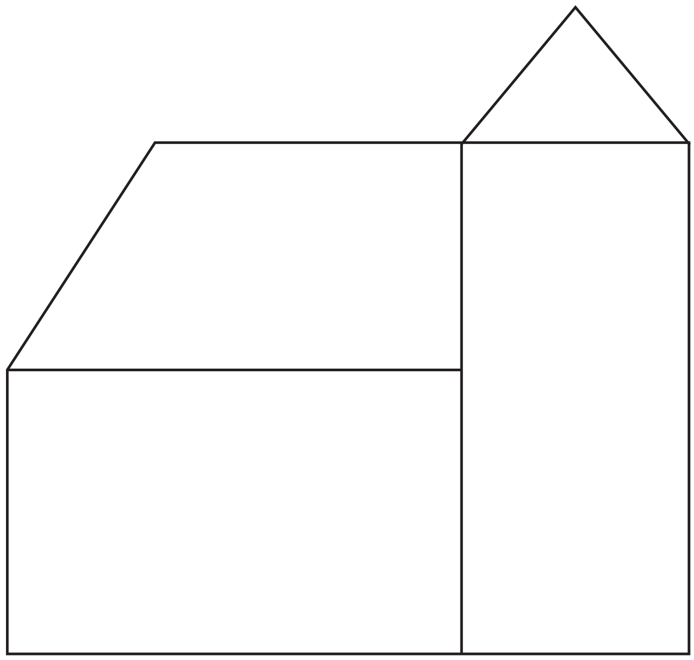


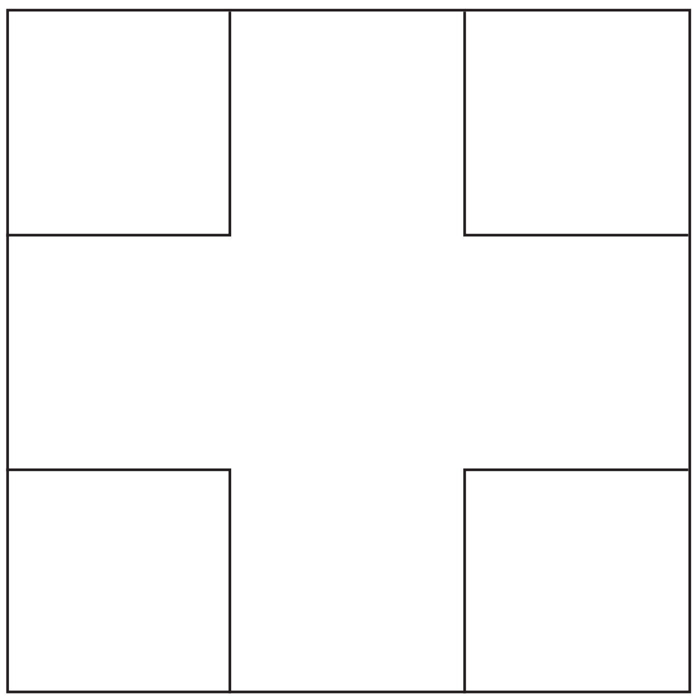
D



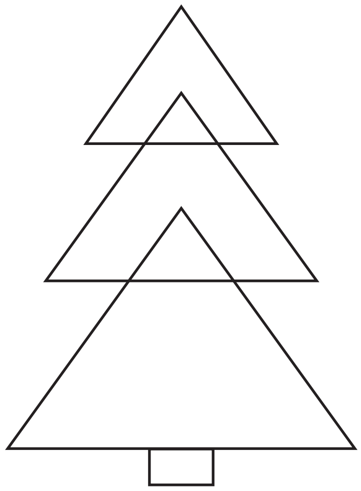
Figuren verändern

Verändere die Figuren so, dass ein Eulerweg möglich ist.
Du kannst dazu neue Wege hinzufügen.

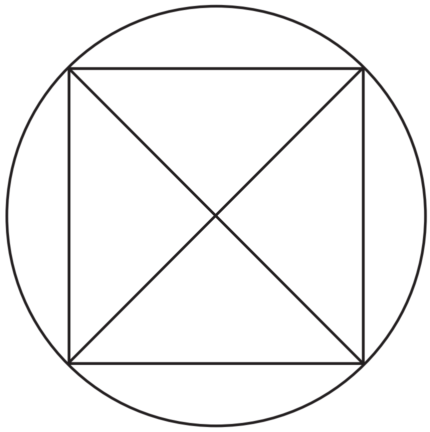




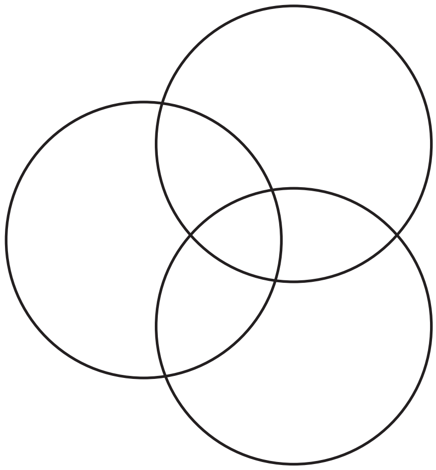
Eulerkreis oder Eulerweg?



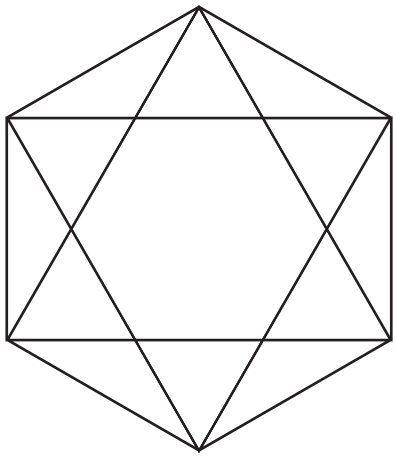
- [ ] Eulerkreis
- [ ] Eulerweg
- [ ] nicht in einem Zug möglich



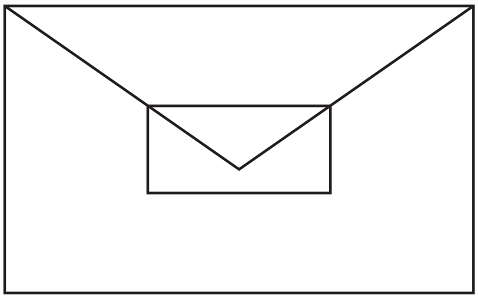
- [ ] Eulerkreis
- [ ] Eulerweg
- [ ] nicht in einem Zug möglich



- [ ] Eulerkreis
- [ ] Eulerweg
- [ ] nicht in einem Zug möglich



- [ ] Eulerkreis
- [ ] Eulerweg
- [ ] nicht in einem Zug möglich



- [ ] Eulerkreis
- [ ] Eulerweg
- [ ] nicht in einem Zug möglich

Die Regel entdecken und erklären

Wie kannst du schnell herausfinden, ob es sich bei einer Figur um einen Eulerkreis oder um einen Eulerweg handelt? Oder ob diese Figur nicht in einem Zug zu zeichnen ist?

Erkläre und zeichne deine Entdeckung.

Meine Regel heißt:

westermann

Eulerhausen

Fritz, der Schneeschieberfahrer plant seine Fahrt durch Eulerhausen. Findet er einen Weg, um auf allen Straßen den Schnee zu räumen, ohne eine Straße doppelt zu fahren? Die Stadtverwaltung erlaubt ihm, kurze Straßen im Winter für den Verkehr zu sperren und Verbindungsstraßen bis zum Winter bauen zu lassen. Zeichne Sperrungen oder neue Straßen in den Stadtplan ein, so dass Fritz einen Eulerweg durch Eulerhausen fahren kann.

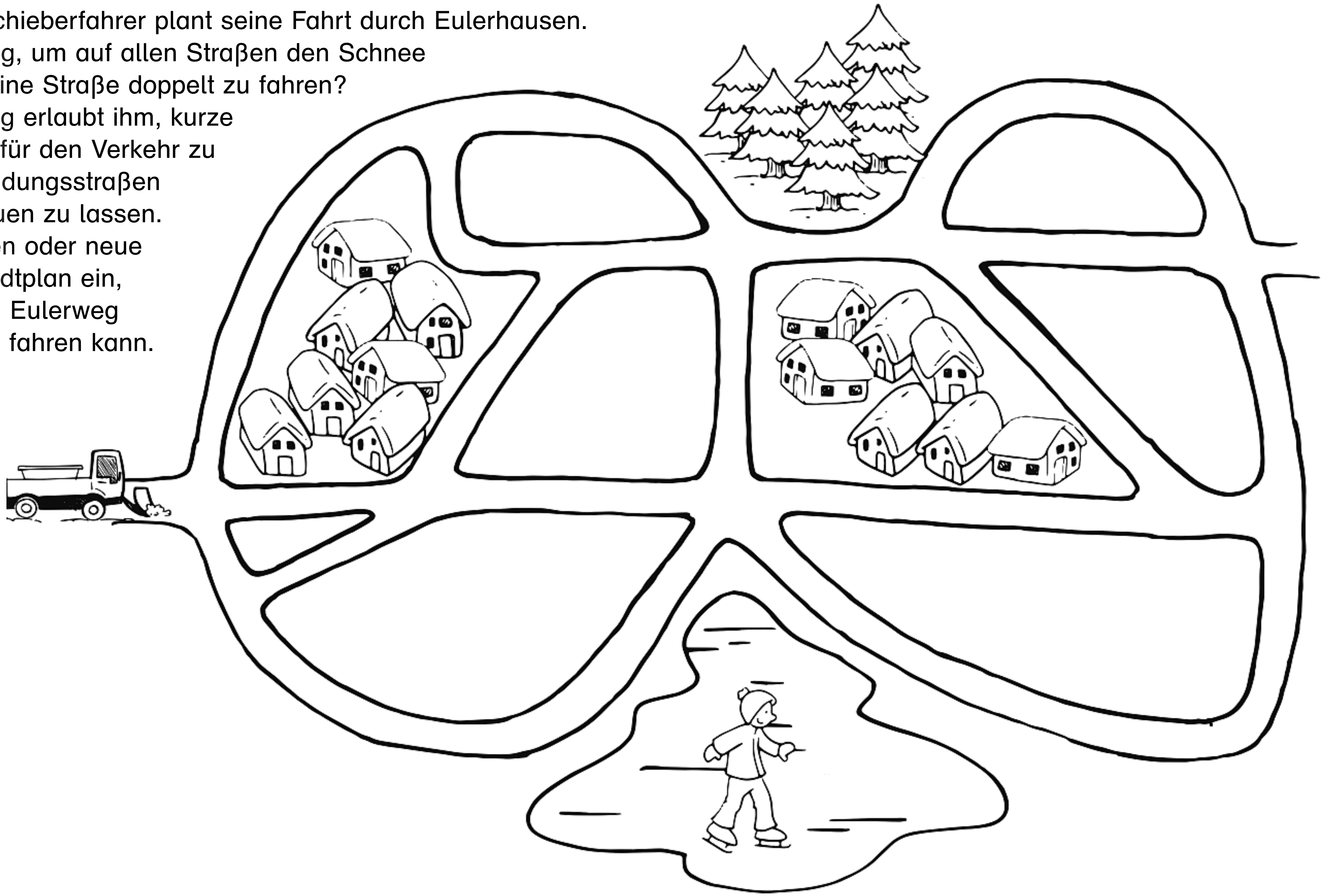


Illustration: Antje Bohnstedt